УДК 539.12.01

КОНСТАНТЫ РАСПАДА СКАЛЯРНЫХ И ПСЕВДОСКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ В КВАРКОВЫХ МОДЕЛЯХ С КВАЗИЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

А.А.Андрианов*, В.А.Андрианов*, М.К.Волков, В.Л.Юдичев

Проведено сравнение двух эффективных кварковых моделей: модели с квазилокальным взаимодействием в поликритическом режиме и модели типа Намбу—Иона-Лазинио (НИЛ) с сепарабельным нелокальным взаимодействием. Обе модели позволяют описать низкоэнергетическое взаимодействие основных скалярных и псевдоскалярных (σ, π) мезонных состояний, а также их радиальных возбуждений (σ', π'). Для модели с квазилокальным взаимодействием в поликритическом режиме введена токовая масса кварка и определены модельные параметры в соответствии с наблюдаемыми значениями масс π и π', а также константой распада пи-мезона f_π. В этой же модели вычислены константы $f_{\pi'}$, f_σ и $f_{\sigma'}$. Аналогичные расчеты проведены в модели НИЛ с сепарабельным нелокальным взаимодействием. Показано выполнение всех низкоэнергетических теорем в киральном пределе.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

The Decay Constants of the Scalar and Pseudoscalar Mesons in the Quark Models with Quasilocal Interaction

A.A.Andrianov et al.

Two effective quark models: the model with quasilocal interaction in polycritical regime and the Nambu—Jona-Lasinio (NJL)-type model with separate interaction have been compared. Both models allow one to describe the low-energy interaction of the ground scalar and pseudoscalar meson states (σ, π) and also their radial excitations (σ', π'). For the model with quasilocal interaction in polycritical regime, the current quark mass is introduced and the model parameters are defined to conform to the observed values of the masses of π, π' and also the value of the decay constant f_π. In this model the constants $f_{\pi'}$, f_σ, and $f_{\sigma'}$ are calculated. Similar computations are made in the NJL-type model with the separable non-local interaction. All the low-energy theorems are shown to be fulfilled in the chiral limit.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

*Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета

1. Введение

Адекватное описание низкоэнергетического спектра мезонов и их возбуждений представляет собой важную задачу в непертурбативной области КХД, где неприменима теория возмущений и необходимо использовать феноменологические методы. В то время как взаимодействие легких псевдоскалярных мезонов в области низких энергий с хорошей точностью описывается при помощи эффективного кирального лагранжиана, который основан на реализации киральной симметрии [1,2], структура лагранжиана, включающего возбужденные мезонные поля, не столь очевидна.

При введении возбужденных резонансов в эффективный киральный лагранжиан число вершин значительно возрастает, при этом не существует простых принципов, которые позволили бы ограничить количество появляющихся новых параметров лагранжиана. Кроме того, должны выполнятся все низкоэнергетические теоремы для пионов, так, например, в киральном пределе пи-мезон должен отщепляться от «тяжелых» степеней свободы, превратившись в чисто голдстоуновский бозон. Ожидается также, что константа распада $f_{\pi'}$ должна обращаться в ноль [3] в киральном пределе.

Одним из способов построения эффективных мезонных лагранжианов является бозонизация кварковых моделей типа Намбу—Иона-Лазинио (НИЛ), в которых динамическое нарушение киральной симметрии (ДНКС) происходит в результате сильного притяжения кварков, которое описывается четырехфермионными вершинами [4,5]. Обычная модель НИЛ после выполнения процедуры бозонизации воспроизводит структуру линейной сигма-модели, в рамках которой выполняются все известные следствия низкоэнергетических теорем в физике легких псевдоскалярных мезонов.

Модель НИЛ, после некоторой модификации, может быть использована для получения эффективного кирального лагранжиана, включающего радиально-возбужденные скалярные, псевдоскалярные, векторные и аксиально-векторные мезонные состояния. Этого можно достичь введением нелокального четырехфермионного взаимодействия. Известно много нелокальных обобщений модели НИЛ [6,7,8]. Но, в основном, в этих моделях требуется введение билокальных мезонных полей для бозонизации, что приводит к значительным трудностям при выполнении согласованного разложения по производным для того, чтобы получить эффективный лагранжиан.

Недавно были независимо развиты два подхода, позволяющие избежать проблем с билокальными мезонными полями. В одном из них строится модель с квазилокальным взаимодействием в окрестности поликритической точки [9,10,11], в другом — модель с сепарабельным нелокальным кварковым взаимодействием [12,13,14]. Обе модели представляют собой обобщения модели НИЛ, содержащие вершины, которые включают производные фермионных полей. Эти модели могут быть бозонизированы с использованием локальных мезонных полей подобно тому, как это делается в обычной модели НИЛ. Кроме того, они позволяют описать несколько мезонных состояний с одними и теми же квантовыми числами (основные состояния и их ближайшие радиальные возбуждения).

В модели с сепарабельным нелокальным кварковым взаимодействием [12,13,14] была вычислена константа распада $f_{\pi'}$, при нормировке на наблюдаемый спектр масс псевдоскалярных мезонов и константу f_{π}. Однако в двухканальной модели с квазилокальным взаимодействием [11] это вычисление не было проделано, так как не была введена токовая масса кварка, без которой невозможно воспроизвести массу пи-мезона и, таким образом, произвести нормировку модельных параметров на наблюдаемые величины.

Здесь мы рассматриваем двухфлейворную двухканальную модель с ненулевой токовой массой кварка, которая получается из модели [11], и проводим частичное сравнение с моделью [12]. При этом параметры модели [11] выбраны так, чтобы модель могла воспроизвести наблюдаемые значения масс псевдоскалярных мезонов (π, π') и константы распада f_π. Сравниваются получающиеся в результате динамическая и токовая массы кварков, константа распада $f_{\pi'}$. Кроме того, в модели [11] вычисляются константы f_σ и $f_{\sigma'}$.

Мы не даем в данной работе подробного описания моделей и принципов их построения, которые читатель может найти в работах [11,12].

2. Двухканальная модель с ненулевой токовой массой кварка

Рассмотрим $U_L(1) \times U_R(1)$-симметричный лагранжиан квазилокальной НИЛ модели, допускающей поликритический режим, с нулевой токовой массой кварка. Его минимальная структура подробно описана в [11], здесь мы приводим окончательное выражение:

$$\mathcal{L} = \bar{q}i\partial\!\!\!/ q + \frac{1}{N_c\Lambda^2}\sum_{m,n=0}^{2} a_{mn}\bar{q}_R f_m\left(\frac{-\partial^2}{\Lambda^2}\right)q_L \cdot \bar{q}_L f_n\left(\frac{-\partial^2}{\Lambda^2}\right)q_R, \tag{1}$$

где a_{mn} — эрмитова матрица констант кваркового взаимодействия, не имеющая нулевых собственных значений, ее элементы выбраны вещественными, для того чтобы исключить явное нарушение CP-четности. Киральные фермионные поля выражены переменными $q_{L(R)} = 1/(1 \pm \gamma_5)q$. Рассматриваются кварки двух ароматов. Параметр Λ определяет верхнюю границу в кварковом спектре масс.

Для того чтобы получить квазилокальное взаимодействие, мы вводим формфакторы в виде полиномов по производным:

$$f_m(\tau) = \sum_{i=0}^{K_m} f_m^{(i)}\tau^i. \tag{2}$$

Переменная τ соответствует производной второго порядка: $\tau \to -\partial^2/\Lambda^2$. Для того чтобы фермионные токи были эрмитовы, мы выбираем следующий порядок действия производной:

$$\bar{q}\frac{\partial^2}{\Lambda^2} \equiv \frac{1}{4}\bar{q}\left(\frac{\overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial}}{\Lambda}\right)^2 q. \tag{3}$$

Кроме того, вершины взаимодействия регуляризованы при помощи обрезания по импульсам (в евклидовой метрике):

$$\bar{q}q \to \bar{q}\theta(\Lambda^2 + \partial^2)q. \tag{4}$$

Формфакторы $f_m(\tau)$ выбраны в виде полиномов, ортогональных на единичном отрезке:

$$\int_0^1 d\tau f_m(\tau) f_n(\tau) = \delta_{mn}. \tag{5}$$

Условие (5) определяет f_m с точностью до ортогонального преобразования. Так как в данной работе модель с квазилокальным взаимодействием [11] сравнивается с моделью сверхпроводящего типа с сепарабельным взаимодействием [12], целесообразно выбрать формфакторы f_1, f_2 в наиболее подходящем для этого виде. Этому требованию отвечает следующий набор f_1, f_2:

$$f_1(\tau) = 1; \quad f_2 = \sqrt{3}(1 - 2\tau), \tag{6}$$

т.к. в [12,13,14]

$$f_1 = 1.$$

Анализ квазилокальной модели проводится в терминах бозонных полей. Переход к мезонному эффективному действию осуществляется введением соответствующих вспомогательных полей $\phi_n(x)$:

$$\mathcal{L}(\phi) = \bar{q}(\not{D} + iM(\phi)P_L + iM^+(\phi)P_R)q + N_c\Lambda^2 \sum_{m,n=1}^{2} \phi_m^* a_{mn}^{-1} \phi_n, \tag{7}$$

и последующим функциональным интегрированием по фермионным полям. При этом масса кварка приобретает зависимость от импульса и представляет собой динамическую массовую функцию, которая является линейной комбинацией формфакторов:

$$M(\phi, \tau) \equiv \sum_{n=1}^{2} \phi_n(x) f_n\left(\frac{-\partial^2}{\Lambda^2}\right). \tag{8}$$

Эффективный потенциал V_{eff} оказывается функционалом, зависящим от динамической массовой функции $M(\phi, \tau)$ и пропорционален N_c, что позволяет использовать метод седловой точки для $N_c \gg 1$.

Ненулевую массу кварка можно ввести, дополнив лагранжиан (1) членом $m_0\bar{q}q$. Тогда динамическая массовая функция переопределится следующим образом:

$$M(\tau) = m_0 + \sum_{i=1}^{2} \phi_i f_i(\tau). \tag{9}$$

В дальнейшем удобно переопределить поле ϕ_1, исключив из него величину токовой массы кварка:

$$\phi_1 \to \phi_1 - m_0. \tag{10}$$

Токовая масса кварка, таким образом, поглотится полем ϕ_1, и можно воспользоваться результатом вычисления одной кварковой петли, который был получен в [11]. При этом преобразование (10) приведет к тому, что токовая масса кварка появится в квадратичном по полям ϕ_i члене в формуле (7), для которого после замены (10) получаем:

$$N_c\Lambda^2((m_0^2 + 2m_0\mathrm{Re}\phi_1 + |\phi_1|^2)a_{11}^{-1} - 2m_0\mathrm{Re}\phi_2 a_{12}^{-1} + \phi_1^*\phi_2 a_{12}^{-1} + \phi_2^*\phi_1 a_{21}^{-1} + |\phi_2|^2 a_{22}^{-1}). \quad (11)$$

Полный вид эффективного потенциала с токовой массой легко восстанавливается, если учесть (11):

$$V_{\mathrm{eff}} = \frac{N_c}{4\pi^2}\left[-2m_0\phi_1\Lambda^2 + 2\Delta_{11}\phi_1 m_0 + 2m_0\Delta_{12}\phi_2 - \sum_{l,m=1}^{2}\phi_l^*\Delta_{lm}\phi_m + \frac{1}{2}|M_0|^4 \times \right.$$
$$\left. \times\left(\ln\frac{\Lambda^2}{|M_0|^2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 (|M(\tau)|^4 - |M_0|^4)\frac{d\tau}{\tau}\right], \quad (12)$$

где $M_0 = M(0)$, а константы a_{mn} параметризованы при помощи Δ_{mn}: $a_{mn}^{-1} = \delta_{mn} + \Delta_{mn}/\Lambda^2$.

Минимум этого потенциала в режиме с ДНКС достигается, когда хотя бы одно из полей ϕ_1, ϕ_2 имеет ненулевое значение. Ограничимся рассмотрением случая, когда ДНКС не приводит к спонтанному нарушению CP-четности, т.е. когда ϕ_1, ϕ_2 — вещественны. Тогда имеются только два уравнения на массовую щель, общий вид которых дан в [11].

Для простоты будем считать $\phi_2 = 0$ (это соответствует отсутствию импульсной зависимости в M и согласуется с моделью [12]). Тогда параметр Δ_{22} (см. [11]) выпадает из уравнения на щель и определяет только массу π'.

В результате, приходим к следующему виду уравнений на массовую щель:

$$m_0 = \frac{1}{\Lambda^2 - \Delta_{11}}\left(-\Delta_{11}M_0 + M_0^3\ln\frac{\Lambda^2}{|M_0|^2}\right), \quad (13)$$

$$m_0 = \frac{1}{\Delta_{12}}\left(-\Delta_{12}M_0 + \sqrt{3}M_0^3\ln\frac{\Lambda^2}{|M_0|^2} - 2\sqrt{3}M_0^3\right). \quad (14)$$

При $\phi_2 = 0$ динамическая масса выражается только через ϕ_1, т.е. $\phi_1 = M_0$ (см. (8)), тогда вместо ϕ_1 в дальнейшем удобно использовать переменную M_0.

В уравнении (13) присутствует большой параметр (Λ^2), поэтому для самосогласованности модели мы принимаем для токовой массы кварка следующее скейлинговое поведение:

$$m_0\Lambda^2 \sim 1 \quad (\Lambda \to \infty). \quad (15)$$

(В киральном пределе $m_0\Lambda^2 = 0$). В дальнейшем все величины $O(m_0)$, не содержащие зависимости от Λ, будем считать в нашем подходе величинами порядка $O(1/\Lambda^2)$.

Уравнением (13) зафиксируем токовую массу кварка, а левую часть уравнения (14), которая, согласно (15), является малой величиной $O(1/\Lambda^2)$, можно приближенно считать равной нулю. Уравнение (14), таким образом, позволяет зафиксировать Δ_{12}.

Для нормировки на спектр масс наблюдаемых скалярных и псевдоскалярных мезонов необходимо найти квадратичную по полям скаляров и псевдоскаляров часть эффективного действия. Определим поле $\phi_j = \bar\sigma_j + i\bar\pi_j$, выделив скалярную, $\bar\sigma_j$, и псевдоскалярную, $\bar\pi_j$, компоненты. Квадратичная часть $S^{(2)}_{\text{eff}}$ эффективного действия в полях $\bar\sigma_j$, $\bar\pi_j$, вообще говоря, недиагональна:

$$S^{(2)}_{\text{eff}} = \frac{N_c}{8\pi^2}\sum_{i,j=1}^{2}\left[\bar\sigma_i(A^{\sigma\sigma}p^2 + B^{\sigma\sigma})_{ij}\bar\sigma_j + 2\bar\sigma_i(A^{\sigma\pi}p^2 + B^{\sigma\pi})_{ij}\bar\pi_j + \bar\pi_i(A^{\pi\pi}p^2 + B^{\pi\pi})_{ij}\bar\pi_j\right], \quad (16)$$

где A^{mn}_{ij} — симметричная матрица, определяемая следующим образом:

$$A^{\sigma\sigma}_{ij} = A^{\pi\pi}_{ij}; \qquad A^{\pi\sigma}_{ij} = 0; \quad (17)$$

$$A^{\pi\pi}_{11} = \ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 1, \qquad A^{\pi\pi}_{12} = \sqrt{3}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 3\right), \quad (18)$$

$$A^{\pi\pi}_{22} = 3\left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 3\right), \quad (19)$$

а B^{mn}_{ij} — матрица вторых вариаций эффективного потенциала. Для псевдоскаляров имеем:

$$B^{\pi\pi}_{11} = 2M_0^2\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 2\Delta_{11}, \quad (20)$$

$$B^{\pi\pi}_{12} = -4\sqrt{3}\,M_0^2 + 2\sqrt{3}\,M_0^2\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 2\Delta_{12}, \quad (21)$$

$$B^{\pi\pi}_{22} = -12M_0^2 + 6M_0^2\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 2\Delta_{22}. \quad (22)$$

В точке минимума потенциала (т.е. на решениях системы уравнений на массовую щель) величина $B^{\pi\pi}_{12} = O(m_0)$, что легко следует из уравнения (14), а следовательно, ее можно считать равной нулю в подходе, используемом в данной модели, когда для токовой массы кварка выбрано скейлинговое поведение (15).

Нормировку на спектр масс наблюдаемых псевдоскалярных мезонов выполним следующим образом. Во-первых, фиксируем модельный спектр масс псевдоскалярных мезонных состояний, который определяется из уравнения

$$\det\,(A^{\pi\pi}p^2 + B^{\pi\pi}) = 0. \quad (23)$$

Потребовав, чтобы $p_1^2 = -m_\pi^2$ и $p_2^2 = -m_{\pi'}^2$ удовлетворяли уравнению (23), получаем для $B^{\pi\pi}_{11}$ и $B^{\pi\pi}_{22}$:

$$B_{11}^{\pi\pi} = 6\left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 3\right)\frac{m_{\pi'}^2 m_\pi^2}{B_{22}^{\pi\pi}}, \tag{24}$$

$$B_{22}^{\pi\pi} = 3\left[(m_{\pi'}^2 + m_\pi^2) + \sqrt{(m_{\pi'}^2 + m_\pi^2)^2 - 2m_{\pi'}^2 m_\pi^2\left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 1\right)}\right]\frac{\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 3}{\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 1}. \tag{25}$$

Далее остаются неопределенными Λ^2 и M_0^2, и нам необходимы еще два условия, для того чтобы фиксировать все параметры модели. В качестве одного из условий используем соотношение Голдбергера--Треймана:

$$f_\pi = \frac{M_0}{g_{\pi qq}}. \tag{26}$$

Вторым условием возьмем фиксированное значение кваркового конденсата:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{N_c}{4\pi^2} M_0\left(\Lambda^2 - M_0^2\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2}\right). \tag{27}$$

При фиксированном $\langle \bar{q}q \rangle$ динамическая масса представляет собой функцию от отношения Λ^2 и M_0^2. Тогда, выразив M_0 через конденсат и подставив его в соотношение (26), получаем уравнение на отношение Λ^2 и M_0^2, так как входящая в (26) константа $g_{\pi qq}$ зависит от отношения Λ^2 и M_0^2.

Константа $g_{\pi qq}$ получается после диагонализации квадратичной по пионным полям (16) части эффективного лагранжиана. Диагонализация осуществляется (неортогональным) линейным преобразованием вида

$$\bar{\pi} = R_{11}\tilde{\pi} + R_{12}\tilde{\pi}', \quad \tilde{\pi}' = R_{21}\tilde{\pi} + R_{22}\tilde{\pi}', \tag{28}$$

где R_{lm}, $(l, m = 1,2)$ — элементы (неортогональной) матрицы

$$R = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{B_{11}^{\pi\pi}}} & \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{B_{11}^{\pi\pi}}} \\ \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{B_{22}^{\pi\pi}}} & -\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{B_{22}^{\pi\pi}}} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Угол α определяется через тангенс:

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\sqrt{3B_{11}^{\pi\pi}B_{22}^{\pi\pi}}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 3\right)}{B_{22}^{\pi\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 1\right) - 3B_{11}^{\pi\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2} - 3\right)}. \tag{30}$$

После преобразования (28) $A^{\pi\pi}p^2 + B^{\pi\pi}$ представляет собой диагональную матрицу

$$R^T(A^{\pi\pi}p^2+B^{\pi\pi})R=\mathrm{diag}\left(\frac{p^2}{m_\pi}+1;\ \frac{p^2}{m_{\pi'}}+1\right). \tag{31}$$

Теперь, для того чтобы перейти к физическим пионным полям π и π', осталось выделить из $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\pi}'$ множители $\sqrt{Z_\pi}$ и $\sqrt{Z_{\pi'}}$:

$$Z_\pi=\frac{4\pi^2m_\pi^2}{N_c},\quad Z_{\pi'}=\frac{4\pi^2m_{\pi'}^2}{N_c},\quad \tilde{\pi}=\sqrt{Z_\pi}\pi,\quad \tilde{\pi}'=\sqrt{Z_{\pi'}}\pi'. \tag{32}$$

В результате преобразования (28) и перенормировки (32) получаем константы $g_{\pi qq}$ и $g_{\pi' qq}$:

$$g_{\pi qq}=\sqrt{Z_\pi}(R_{11}f_1(0)+R_{12}f_2(0))=\frac{2\pi m_\pi}{\sqrt{N_c}}\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{B_{11}^{\pi\pi}}}+\sqrt{3}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{B_{22}^{\pi\pi}}}\right), \tag{33}$$

$$g_{\pi' qq}=\sqrt{Z_{\pi'}}(R_{21}f_1(0)+R_{22}f_2(0))=\frac{2\pi m_{\pi'}}{\sqrt{N_c}}\left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{B_{11}^{\pi\pi}}}-\sqrt{3}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{B_{22}^{\pi\pi}}}\right). \tag{34}$$

В приближении больших логарифмов, разлагая в ряд по $m_\pi^2/m_{\pi'}^2$ и оставляя лишь первые ненулевые члены, получаем

$$g_{\pi qq}=\left[\frac{N_c}{4\pi^2}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2}-1\right)\right]^{1/2},\quad g_{\pi' qq}=\frac{2\pi}{\sqrt{2N_c}}\left(\frac{m_\pi}{m_{\pi'}}\right)^2. \tag{35}$$

Подставляя (35) в (26), определяем отношение Λ^2/M_0^2.

Константа $f_{\pi'}$ находится, согласно определению:

$$\langle 0|\partial_\mu A^{a\mu}|\pi'^b\rangle=\delta^{ab}m_{\pi'}^2f_{\pi'}, \tag{36}$$

где $A^{a\mu}$ — аксиально-векторный кварковый ток. Матричный элемент в (36) вычисляется в приближении одной кварковой петли. Таким образом, получаем значение для $f_{\pi'}$:

$$f_{\pi'}=\frac{N_c}{4\pi^2}M_0g_{\pi' qq}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2}-1\right)=\frac{M_0\sqrt{N_c}}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{m_\pi}{m_{\pi'}}\right)^2\left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2}-1\right). \tag{37}$$

В наших оценках мы полагаем массы пионов, в соответствии с их экспериментально полученными значениями, $m_\pi=135$ МэВ, $m_{\pi'}=1300$ МэВ, а константу распада пиона f_π равной 93 МэВ. Кварковый конденсат при этом фиксирован величиной $-(265\text{ МэВ})^3$ (минимальное значение конденсата, при котором в данной модели выполняется (26)). Для перечисленных выше данных имеем следующие оценки для параметров модели:

	Λ	M_0	m_0
МэВ	1097	237	4,2

	Δ_{11}	Δ_{12}	Δ_{22}
МэВ^2	$1{,}5\cdot10^5$	$1{,}03\cdot10^5$	$2{,}2\cdot10^5$

Величина $f_{\pi'}$, при этом оказывается приблизительно равной 1 МэВ.

Спектр масс скаляров определяется однозначно, после того как параметры модели фиксированы. Квадратичная по полям σ и σ' часть эффективного действия (см. (16)) дается теми же параметрами, что и часть, квадратичная по полям псевдоскаляров. В точке минимума потенциала матрица $B^{\sigma\sigma}$ может быть представлена в виде суммы двух матриц:

$$B^{\sigma\sigma} = B^{\pi\pi} + 4M_0^2 A^{\pi\pi}. \tag{38}$$

Преобразование (28) диагонализует $A^{\pi\pi}$ и $B^{\pi\pi}$ одновременно и, таким образом, диагонализует $A^{\sigma\sigma} = A^{\pi\pi}$ и $B^{\sigma\sigma}$. Отсюда сразу же получаем спектр масс скаляров:

$$m_\sigma^2 = m_\pi^2 + 4M_0^2, \quad m_{\sigma'}^2 = m_{\pi'}^2 + 4M_0^2, \tag{39}$$

а также равенство констант

$$g_{\sigma qq} = g_{\pi qq}, \quad g_{\sigma' qq} = g_{\pi' qq}. \tag{40}$$

Константы f_σ и $f_{\sigma'}$ определяются через матричные элементы скалярной кварковой плотности:

$$\langle 0 | \bar{q}q | \sigma \rangle = B_0 f_\sigma, \quad \langle 0 | \bar{q}q | \sigma' \rangle = B_0 f_{\sigma'}. \tag{41}$$

Аналогичные определения можно сделать и для псевдоскалярной кварковой плотности:

$$\langle 0 | \bar{q}i\gamma_5 q | \pi \rangle = B_0 f_\pi, \quad \langle 0 | \bar{q}i\gamma_5 q | \pi' \rangle = B_0 f_{\pi'}, \tag{42}$$

где B_0 связана с кварковым конденсатом: $\langle \bar{q}q \rangle = -f_\pi^2 B_0$. Выражая кварковый конденсат через параметры модели, приходим к соотношению

$$f_\sigma : f_\pi = g_\sigma : g_\pi, \quad f_{\sigma'} : f_{\pi'} = g_{\sigma'} : g_{\pi'}. \tag{43}$$

Из равенств (40) получаем

$$f_\pi = f_\sigma, \quad f_{\pi'} = f_{\sigma'}. \tag{44}$$

3. Модель НИЛ с сепарабельным взаимодействием

В отличие от обычной модели НИЛ (с локальным взаимодействием) модель с сепарабельным взаимодействием, согласно [12], имеет четырехфермионные вершины следующей структуры:

$$\tilde{S}_{\text{int}} = g \int d^4x \sum_{i=1}^{N} [j_{\sigma,i}(x) j_{\sigma,i}(x) + j_{\pi,i}^a(x) j_{\pi,i}^a(x)], \tag{45}$$

$$j_{\sigma,i}(x) = \int d^4x_1 \int d^4x_2\, \bar{\psi}(x_1) F_{\sigma,i}(x; x_1, x_2) \psi(x_2), \tag{46}$$

$$j_{\pi,i}^a(x) = \int d^4x_1 \int d^4x_2\, \bar{\psi}(x_1) F_{\pi,i}^a(x; x_1, x_2) \psi(x_2). \tag{47}$$

где $F_{\sigma,i}(x; x_1, x_2)$, $F^{a}_{\pi,i}(x; x_1, x_2)$, $i = 1,\dots, N$, — нелокальные скалярная и псевдоскалярная вершины (в метрике Минковского). Введением вспомогательных скалярного и (триплета) псевдоскалярных полей (47) преобразуется к следующему виду:

$$S_{\text{bos}}[\overline{\psi}, \psi; \sigma_1, \pi_1, \dots \sigma_N, \pi_N] = \int d^4x_1 \int d^4x_2 \overline{\psi}(x_1) \times$$
$$\times \left[(i\partial\!\!\!/_{x_2} - m^0)\delta(x_1 - x_2) + \int d^4x \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i(x) F_{\sigma,i}(x; x_1, x_2) + \pi^a_i(x) F^{a}_{\pi,i}(x; x_1, x_2)) \right] \psi(x_2) -$$
$$- \frac{1}{2g} \int d^4x \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i^2(x) + \pi_i^{a2}(x)). \tag{48}$$

Это действие описывает систему локальных мезонных полей $\sigma_i(x)$, $\pi^a_i(x)$, $i = 1,\dots, N$, взаимодействующих с кварками. Подчеркиваем, что эти поля еще не являются физическими полями. Физические мезонные поля определяются после того, как будет выполнено интегрирование по кварковым полям, и в полученном таким образом эффективном действии для мезонных полей квадратичная по полям часть будет приведена к диагональному виду.

Далее удобно перейти к импульсному представлению вершин $F_{\sigma,i}$ и $F_{\pi,i}$:

$$F_{\sigma,i}(x; x_1, x_2) = \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp i \left[\frac{1}{2}(P + k)(x - x_1) + \frac{1}{2}(P - k)(x - x_2) \right] F_{\sigma,i}(k \,|\, P); \tag{49}$$

здесь k и P — относительный и суммарный импульсы кварк-антикварковой системы.

Использование нелокальных вершин вместо локальных может приводить к появлению относительно-временных возбуждений — «шпурионов» [16]. Их отсутствие может быть гарантировано, если вершина зависит от компоненты относительного импульса кварк-антикварковой системы, которая поперечна ее полному импульсу [8,17] $k_\perp$:

$$F_{\sigma,i}(k \,|\, P) \equiv F_{\sigma,i}(k \,|\, P), \quad \text{etc.}, \quad k_\perp \equiv k - \frac{Pk}{P^2} P. \tag{50}$$

В простейшем случае, для двух состояний ($N = 2$), вершины, согласно [12], можно выбрать следующим образом:

$$\left. \begin{matrix} F_{\sigma,1}(k_\perp | P) \\ F^{a}_{\pi,1}(k_\perp | P) \end{matrix} \right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ i\gamma_5 \tau^a \end{Bmatrix} \times \Theta(\Lambda_3 - |k_\perp|), \tag{51}$$

$$\left. \begin{matrix} F_{\sigma,2}(k_\perp | P) \\ F^{a}_{\pi,2}(k_\perp | P) \end{matrix} \right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ i\gamma_5 \tau^a \end{Bmatrix} \times \Theta(\Lambda_3 - |k_\perp|) f(k_\perp), \tag{52}$$

$$f(k_\perp) = c(1 + d\,|k_\perp|^2), \quad |k_\perp| \equiv \sqrt{-k_\perp^2}\,. \tag{53}$$

Функция $\Theta(\Lambda_3 - |k_\perp|)$ является ковариантным обобщением обычного обрезания по трехмерному импульсу в системе покоя мезона.

Интегрирование действия (48) по кварковым степеням свободы при выборе вершин в виде (51), (52) приводит к эффективному действию для скалярных и псевдоскалярных полей σ_1, π_1, σ_2, π_2 в следующем виде:

$$W[\sigma_1, \pi_1, \sigma_2, \pi_2] = -\frac{1}{2g}\int(\sigma_1^2 + \pi_1^{a2} + \sigma_2^2 + \pi_2^{a2}) - \tag{54}$$

$$- iN_c \mathrm{Tr}\log\left[i\not{\partial} - m^0 + \sigma_1 + i\gamma_5\tau^a\pi_1^a + (\sigma_2 + i\gamma_5\tau^a\pi_2^a)f\right].$$

В приближении среднего поля, которое соответствует вычислению главного порядка в разложении по $1/N_c$, вакуумные средние полей σ_1, σ_2 определяются из уравнений на щель:

$$\frac{\delta W}{\delta\sigma_1} = -iN_c \,\mathrm{tr}\int_{\Lambda_3}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\not{k} - m^0 + \sigma_1 + \sigma_2 f(k_\perp)} - \frac{\sigma_1}{g} = 0, \tag{55}$$

$$\frac{\delta W}{\delta\sigma_2} = -iN_c \,\mathrm{tr}\int_{\Lambda_3}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{f(k_\perp)}{\not{k} - m^0 + \sigma_1 + \sigma_2 f(k_\perp)} - \frac{\sigma_2}{g} = 0. \tag{56}$$

Уравнения (55), (56) допускают решение, при котором $\sigma_2 = 0$. При этом динамическая масса m оказывается не зависящей от импульса: $m = -\sigma_1 + m^0$.

Вычисления в [12] выполнены в системе покоя мезона, т.е. при $\mathbf{P} = 0$, $k_\perp = (0, \mathbf{k})$. Параметры модели [12] определяются из требования соответствия наблюдаемым массам псевдоскаляра и его первого радиального возбуждения, а также константе распада f_π.

Квадратичная часть эффективного действия в терминах полей π_1 и π_2 имеет вид

$$W = W^{(0)} + W^{(2)}, \tag{57}$$

$$W^{(2)} = \frac{1}{2}\int\frac{d^4P}{(2\pi)^4}\sum_{i,j=1}^{2}\pi_i^a(P)K_{ij}^{ab}(P)\pi_j^b(P). \tag{58}$$

Коэффициенты K_{ij} определены в [12,13,14], где для них выполнено разложение в ряд по P^2. В порядке $O(P^2)$ $K_{ij}(P)$ имеет форму

$$K_{11}(P) = Z_1(P^2 - m_1^2), \quad K_{22}(P) = Z_2(P^2 - m_2^2), \quad K_{12}(P) = K_{21}(P) = \sqrt{Z_1 Z_2}\,\Gamma P^2, \tag{59}$$

где

$$Z_1 = 4I_2, \quad Z_2 = 4I_2^{ff}, \tag{60}$$

$$m_1^2 = Z_1^{-1}(-8I_1 + g^{-1}) = \frac{m^0}{Z_1 g m}, \tag{61}$$

$$m_2^2 = Z_2^{-1}(-8I_1^{ff} + g^{-1}), \tag{62}$$

$$\Gamma = \frac{4}{\sqrt{Z_1 Z_2}} I_2^f. \tag{63}$$

Здесь через I_n, I_n^f и I_n^{ff} обозначены обычные однопетлевые кварковые интегралы, которые появляются в результате разложения в ряд по импульсу кваркового детерминанта модели НИЛ, в которых, кроме того, присутствуют один, два или ни одного формфактора $f(k_\perp)$ в числителе. В системе покоя мезона, $k_\perp = (0, \mathbf{k})$, эти интегралы выражаются формулой

$$I_n^{f.f} \equiv -iN_c \int_{\Lambda_3} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f(\mathbf{k})..\mathbf{f}(\mathbf{k})}{(\mathbf{m}^2 - \mathbf{k}^2)^{\mathbf{n}}}, \tag{64}$$

где вначале вычисляется контурный интеграл по k_0, а затем трехмерный интеграл по $\mathbf{k}$. Регуляризация расходящихся интегралов производится простым обрезанием трехмерного импульса по верхней границе, Λ_3.

Поля π_1 и π_2 не являются физическими, т.к. квадратичная часть (58) не соответствует стандартному виду. Физические поля π и π', представляющие собой основное и возбужденное псевдоскалярные мезонные состояния, связаны с полями π_1 и π_2 линейным преобразованием

$$\sqrt{Z_1}\pi_1^a = \frac{\cos\phi}{\sqrt{Z_\pi}}\pi^a + \frac{m_2}{m_1}\frac{\sin\phi}{\sqrt{Z_{\pi'}}}\pi'^a, \tag{65}$$

$$\sqrt{Z_2}\pi_2^a = \frac{m_1}{m_2}\frac{\sin\phi}{\sqrt{Z_\pi}}\pi^a - \frac{\cos\phi}{\sqrt{Z_{\pi'}}}\pi'^a,$$

которое преобразует квадратичную часть эффективного действия к диагональному стандартному виду. При этом:

$$\operatorname{tg} 2\phi = 2\Gamma\frac{m_1}{m_2}\left(1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\right)^{-1}, \tag{66}$$

$$Z_\pi = \cos^2\phi + \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\phi + 2\Gamma\frac{m_1}{m_2}\cos\phi\sin\phi, \tag{67}$$

$$Z_{\pi'} = \cos^2\phi + \frac{m_2^2}{m_1^2}\sin^2\phi + 2\Gamma\frac{m_2}{m_1}\cos\phi\sin\phi. \tag{68}$$

В результате данного преобразования находим массы основного и ближайшего возбужденного состояний пи-мезонов:

$$m_\pi^2 = m_1^2 + O(m_1^4), \quad m_{\pi'}^2 = \frac{m_2^2}{1-\Gamma^2}\left[1 + \Gamma^2\frac{m_1^2}{m_2^2} + O(m_1^4)\right]. \tag{69}$$

Константы распада $f_\pi, f_{\pi'}$ находятся, согласно ЧСАТ, вычислением вклада одной кварковой петли в среднее от аксиально-векторного тока между вакуумным и однопионным состояниями. При этом, используя (65) и определения формфакторов f_1 и f_2, получаем для констант распада f_π и $f_{\pi'}$:

$$f_\pi = \sqrt{Z_1}\, m + O(m_1^4), \tag{70}$$

$$f_\pi = \sqrt{Z_1}\, m\Gamma\sqrt{1 - \Gamma^2 \frac{m_1^2}{m_2^2}} + O(m_1^4). \tag{71}$$

Видно, что константы распада совпадают с модельной точностью с предсказаниями, полученными из соотношения Голдбергера—Треймана, а $f_{\pi'}$ обращается в ноль в киральном пределе. Таким образом, оказываются выполненными низкоэнергетические теоремы в физике легких пионов.

Численные оценки, выполненные в [12], приводят к следующим значениям параметров модели: $\Lambda_3 = 1{,}03$ ГэВ, $m = 280$ МэВ, $c = 1{,}37$, $d = -1{,}784$ ГэВ$^{-2}$, $f_{\pi'} = 0{,}57$ МэВ. Параметр d оказался близок по величине к $2/\Lambda^2$, которая соответствует формфакторам f_1 и f_2, ортогональным на отрезке $[0,1]$.

Заключение

В данной работе рассмотрены двухканальная двухфлейворная модель с квазилокальным взаимодействием в окрестности поликритической точки в режиме ДНКС, в которую была введена токовая масса кварка в отличие от ранее рассматривавшейся модели [11], и модель сверхпроводящего типа с сепарабельным взаимодействием. Для случая, когда возникающая в результате ДНКС динамическая массовая функция не содержит импульсной зависимости, осуществлена нормировка на наблюдаемые значения масс пи-мезона и его ближайшего радиально возбужденного состояния (π') с теми же квантовыми числами [15]. Получены оценки для параметров модели, в частности $\Lambda = 1097$ МэВ, $M_0 = 238$ МэВ, $m_0 = 4{,}2$ МэВ. Вычислена константа распада π' мезона $f_{\pi'} = 1$ МэВ, а также константы $f_\sigma = f_\pi$, $f_{\sigma'} = f_{\pi'}$.

Сравнение с моделью [12], которая кратко обсуждается в разделе 3, показывает, что оба подхода ([11] и [12]) дают близкие результаты в одних и тех же условиях. В подходе, развитом в [12], были включены в рассмотрение векторное и аксиально-векторное взаимодействие, что приводит к модификации константы $g_{\pi qq}$ вследствие возникающих в этом случае $\partial_\mu \pi A^\mu$ членов и, как следствие, ведет к несколько иным значениям параметров модели. В модели [11] векторное и аксиально-векторное взаимодействие не были рассмотрены, что следует иметь в виду сравнивая оба подхода. Ожидается, что введение векторных и аксиально-векторных вершин приведет к аналогичной модификации параметров модели [11].

Константа $f_{\pi'}$, к сожалению, на данный момент не известна из эксперимента, и разные подходы дают различные предсказания для ее величины. Так, в модели с квазилокальным взаимодействием $f_{\pi'} = 1$ МэВ, в [12] предсказывается $f_{\pi'} = 0{,}57$ МэВ. Известны также и другие подходы, в которых также определяется величина $f_{\pi'}$. Например, в [18] эффективный киральный лагранжиан для легких мезонов получается редукцией тяжелых мезонных состояний. Это позволяет оценить $f_{\pi'}$ через параметры кирального лагранжиана, что дает $f_{\pi'} \approx 1{,}7$ МэВ. В то же время из правил сумм КХД следует, что величина $f_{\pi'}$ должна быть, как минимум, 2 МэВ [19].

В данной работе приведены оценки для констант f_σ и $f_{\sigma'}$, которые получаются из соответствующего матричного элемента от скалярной кварковой плотности и представляют собой коэффициенты перед частью матричных элементов, пропорциональных квадрату импульса при $p^2 = 0$. В действительности следовало бы вычислить данные константы при $p^2 = m^2_{\sigma,\sigma'}$, но более точная зависимость от импульса выходит за рамки приближения больших логарифмов, которое выступает в данном случае гарантом того, что киральная симметрия не будет нарушена.

Следует также подчеркнуть особенность подхода, развитого в [11], которая заключается в том, что для динамической массы кварка (а равно и токовой) допускается импульсная зависимость, и рассмотренное в данной работе ДНКС является частным случаем в более общей картине, которая была детально исследована в [11].

Работа выполнена по программе и при финансовой поддержке РФФИ (гранты №95-02-05346а и 98-02-18137а).

Литература

1. Callan C.G., Coleman S., Wess J., Zumino B. — Phys.Rev., 1969, v.177, p.2247.
2. Gosiorowiez S., Geffen D.A. — Rev. Mod. Phys., 1969, v.41, p.531.
3. Dominguez C.A. — Phys. Rev., 1977, v.D16, p.2313.
4. Волков М.К., Эберт Д. — ЯФ, 1982, т.36. с.1265;
Ebert D., Volkov M.K. — Z. Phys, 1983, v.C16, p.205.
5. Volkov M.K. — Ann. Phys. (N.Y.), 1984, v.157, p.282; ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.433;
Ebert D., Reinhardt H. — Nucl. Phys., v.B271, p.188.
6. Roberts C.D., Cahill R.T., Prashifka J. — Ann. Phys (N.Y.), 1984, v.188, p.282.
7. Yaouanc A.Le., Oliver L., Pène O., Raynal J.-C. — Phys .Rev, 1984,. v.D29, p.1233.
8. Pervushin V.N. — et al. — Forschr. Phys., 1990, v.38, p.333.
9. Andrianov A.A., Andrianov V.A. — Int. J. Mod. Phys., 1993, v.A8, p.1981.
10. Андрианов А.А., Андрианов В.А. — ТМФ, 1993, т.94, р.6.
11. Андрианов А.А., Андрианов В.А., Юдичев В.Л. — ТМФ, 1996, т.108(2), р.276.
12. Volkov M.K., Weiss C. — Phys. Rev., 1997, v.D56, p.221.
13. Volkov M.K. — ЯФ, 1997, т.60, р.2094.
14. Volkov M.K., Ebert D., Nagy M. — Preprint hep-ph/9705334.
15. Review of Part. Prop., Phys.Rev., 1996, v.D54, p.1.
16. Feynman R.P., Kislinger M., Pavndal F.— Phys. Rev., v.D3, p.2706.
17. Kalinovsky Yu.L., Kaschluhn L., Pervushin V.N. — Phys. Lett., 1989, v.B231, p.288.
18. Andrianov A.A., Andrianov V.A., Manashov A.N. — Int. J. Mod. Phys., 1991, v.A6, p. 5435.
19. Elias V., Fariborz A.H., Samuelf M.A., Fang Shi, Steele T.G. — Phys. Lett., 1997, v.B412, p.131.

Рукопись поступила 8 июля 1998 года.